

# Übungen zur Vorlesung Numerik I

(Blatt 12)

Sommersemester 2004

**Abgabe der Aufgaben bis 13.07.04, 18.00 Uhr  
im Postfach 84 Ebene 6**

## Aufgabe 1:

(4 Punkte)

Bestimmen Sie Werte für  $A, B$  und  $C$ , so daß die Integrationsformel

$$\int_0^2 f(x) dx \approx Af(0) + Bf(1) + Cf(2)$$

exakt ist für alle Polynome vom Grad  $0, 1, 2, \dots, n$ . Dabei soll  $n$  maximal gewählt werden. Wie groß ist  $n$ ?

## Aufgabe 2:

(4 Punkte)

Berechnen Sie die Trapezsumme  $T(h)$  für das Integral

$$I := \int_1^{1.4} \exp(-x^2) dx$$

zur Schrittweite  $h = 0.4/2^i$ . Wählen Sie  $i$  so, daß  $|T(h) - I| \leq 10^{-6}$  gilt.

*Hinweis:* Die zusammengesetzte Trapezregel lautet:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \approx T(h) &:= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \\ &= h \left[ \frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2} \right]. \end{aligned}$$

Der Gesamtfehler ergibt sich zu

$$|T(h) - \int_a^b f(x) dx| \leq (b-a) \frac{h^2}{12} \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

**Aufgabe 3:**

(4 Punkte)

Bestimmen Sie das Gewicht  $c$  und die Knoten  $x_0, x_1 \in [-h, h]$ , so daß die Quadraturformel

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx c(f(x_0) + f(x_1))$$

für Polynome von höchstmöglichen Grad exakt wird. Geben Sie diesen Polynomgrad an!